正 *n* 角形の 3 つの頂点を結んでできる鈍角三角形の数

正 *n* 角形の 3 つの頂点を結んでできる鈍角三角形の数について

n が偶数のときの鈍角三角形の数

手順 1

正 n 角形の 1 つの頂点を A とし，A から反時計回りに順に各頂点に $1,2,\cdots,k,\cdots,n-1$ と番号をつけ，まず頂点 A を鈍角とする鈍角三角形の数を手順 2 で求める。

手順 2

番号 k を選ぶと，k と円の直径をなす頂点の番号は，

頂点の間の数が n であることから，$k+\dfrac{n}{2}$ である。

したがって，k を選んだとき，A が鈍角であるための残りの頂点の番号は，

$k+\dfrac{n}{2}+1$，$k+\dfrac{n}{2}++2$，$\cdots$，$n-1$ となる。

よって，k を選んだときの残りの頂点の数を a_k とすると，

$$a_k=(n-1)-\left(k+\frac{n}{2}+1\right)+1=\frac{n}{2}-k-1$$

鈍角三角形の数は残りの頂点の数で決まるから，
頂点 k を選んだときの鈍角三角形の数も a_k である。

また，$k+\dfrac{n}{2}+1\leq n-1$ かつ $k\geq 1$ より，$1\leq k\leq \dfrac{n}{2}-2$

よって，頂点 A を鈍角とする三角形の数は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-2}a_k&=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{\frac{n}{2}-4}+a_{\frac{n}{2}-3}+a_{\frac{n}{2}-2}\\&=\left(\frac{n}{2}-2\right)+\left(\frac{n}{2}-3\right)+\left(\frac{n}{2}-4\right)+\cdots+3+2+1\\&=\frac{1+\left(\frac{n}{2}-2\right)}{2}\times\left(\frac{n}{2}-2\right)\\&=\frac{(n-2)(n-4)}{8}\end{aligned}$$

補足：等差数列の和＝平均値×項数＝$\dfrac{\text{初項の値＋末項の値}}{2}\times$項数

手順 3

鈍角になれる頂点の数は全部で n 個あるから，

鈍角三角形の総数＝$\dfrac{n(n-2)(n-4)}{8}$

n が奇数のときの鈍角三角形の数

手順 1

正 n 角形の 1 つの頂点を A とし，

A から反時計回りに順に各頂点に $1,2,\cdots,k,\cdots,n-1$ と番号をつけ，

頂点 A が鈍角の場合で考える。

手順 2

頂点 k を選ぶと，頂点 k と円の直径をなす頂点は，

頂点の間の数が n であることから，頂点 $k+\frac{n}{2}$ である。

ところが n は奇数である。

したがって，頂点 k を選んだとき，A が鈍角であるための残りの頂点は，

$k+\frac{n+1}{2}$， $k+\frac{n+1}{2}+1$， $\cdots$， $n-1$ となる。

よって，頂点 k を選んだときの鈍角三角形の数を b_k とすると，

$$b_k=(n-1)-\left(k+\frac{n+1}{2}\right)+1=\frac{n-1}{2}-k$$

また， $k+\frac{n+1}{2}\leq n-1$ かつ $k\geq 1$ より， $1\leq k\leq\frac{n-3}{2}$

よって，頂点 A が鈍角の三角形の数は，

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}}b_k=\frac{n-3}{2}+\frac{n-5}{2}+\frac{n-7}{2}+\cdots+3+2+1$$

$$=\frac{\frac{n-3}{2}+1}{2}\times\frac{n-3}{2}=\frac{(n-3)(n-1)}{8}$$

手順 3

鈍角になれる頂点の数は全部で n 個あるから，

鈍角三角形の総数$=\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$